# FUNCIONES ECONÓMICAS EN UN ENTORNO INCIERTO

## ECONOMIC FUNCTIONS IN AN UNCERTAIN ENVIRONMENT

**Lazzari, Luisa L.**
Facultad de Ciencias Económicas
Universidad de Buenos Aires
CA BA, Argentina
luisalazzari@cimbage.com.ar

**Chiodi, Jorge A.**
Facultad de Ciencias Económicas
Universidad Nacional de Lomas de Zamora
Lomas de Zamora, Buenos Aires, Argentina
jorge.chiodi@gmail.com

**Moulia, Patricia I.**
Facultad de Ciencias Económicas
Universidad de Buenos Aires
CA BA, Argentina
patriciamoulia@cimbage.com.ar

Fecha de Recepción: 27/02/2014 - Fecha de Aprobación: 11/06/2014

## RESUMEN

El mundo está atravesando una de las crisis económicas más profundas de los últimos tiempos. Los escenarios actuales y futuros están plagados de incertidumbre que, en general, no se considera en el análisis de las distintas funciones económicas de interés para el desarrollo del negocio, y la realidad se representa mediante modelos estáticos y casi perfectos del comportamiento de los mercados.

La teoría de conjuntos borrosos permite construir modelos adecuados a partir de realidades inciertas que presentan vaguedad de forma intrínseca. La utilización de números borrosos da posibilidad de considerar los aspectos de un entorno impreciso. A través de la opinión de expertos, se pueden determinar las situaciones extremas y más posibles de las distintas variables en juego.

En este trabajo se presenta el concepto de función fuzzy y, como aporte novedoso, se lo aplica al estudio de un caso en el que intervienen funciones económicas, en las cuales se incorpora la incertidumbre mediante números borrosos triangulares.

**PALABRAS CLAVE**: Número Borroso; Función Fuzzy, Funciones Económicas

## ABSTRACT

The world is going through one of the deepest economic crises in recent times. The current and future scenarios are riddled with uncertainty that is not always taken into account in the analysis of the different economic functions of interest for the development of the business, and the reality is presented by static and almost perfect models of market behavior.

The fuzzy sets theory allows to build suitable models from uncertain realities that present vagueness intrinsically. The use of fuzzy numbers makes possible to consider the aspects of an imprecise environment. Extreme and more possible situations of the different variables involved can be determined through the opinion of experts.

In this paper we present the fuzzy function concept applied to a case study involving economic functions, where the uncertainty is incorporated through the use of triangular fuzzy numbers.

**KEY WORDS**: Fuzzy Number; Fuzzy Function; Economic Functions.

## INTRODUCCIÓN

El mundo está atravesando una de las crisis económicas más profundas de los últimos tiempos. Tanto los escenarios actuales como los futuros están plagados de incertidumbre.

En general, cuando se analizan las distintas funciones económicas que son de interés para el desarrollo del negocio no se tienen en cuenta los ambientes de incertidumbre, y la realidad se representa mediante modelos estáticos y casi perfectos de comportamiento de los mercados.

La teoría de conjuntos borrosos permite construir modelos adecuados a partir de realidades inciertas que presentan vaguedad de forma intrínseca; es decir que cualquier intento de hacer exactos los elementos utilizados lleva a una simplificación que cambia los términos en los que se plantean los problemas o conduce a soluciones no reales.

La utilización de números borrosos da la posibilidad de considerar los aspectos de un entorno impreciso. A través de la opinión de expertos se pueden determinar las situaciones extremas y más posibles de las distintas variables en juego.

Un modelo fuzzy representa cualquier sistema real de manera muy próxima a como lo perciben los individuos; esto lo hace comprensible, aun para una audiencia no especializada, y cada parámetro tiene un significado fácil de entender. Este enfoque acorta la distancia que existe entre el observador que estudia el sistema y el matemático que crea el modelo.

En este trabajo se presenta el concepto de función de número borroso y, como aporte novedoso, se lo aplica al estudio de un caso en el que intervienen funciones económicas, en las cuales se incorpora la incertidumbre mediante el empleo de números borrosos triangulares.

Está estructurado del siguiente modo: en la sección 2 se presentan los elementos teóricos necesarios para el estudio de las funciones fuzzy; en la 3 se introducen los conceptos de función de número borroso y su derivada; en la 4 se aplican estas nociones al análisis de un caso; y en la 5 se formulan algunos comentarios.

## DESARROLLO

### 1. Elementos teóricos

Sea un universo $E$ continuo o discreto. Un subconjunto borroso o fuzzy set $\widetilde{A}$ es una función $\mu_{\widetilde{A}} : X \rightarrow [0,1]$ que asigna a cada elemento del conjunto $E$ un valor $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ perteneciente al intervalo $[0, 1]$, llamado grado o nivel de pertenencia de $x$ a $\widetilde{A}$ (Zadeh, 1965).

Dado un subconjunto borroso $\widetilde{A}$ del referencial $E$, se denomina α-corte o conjunto de nivel α de $\widetilde{A}$ al conjunto nítido $A_\alpha = \{x \in E / \mu_{\widetilde{A}}(x) \geq \alpha\}$ para todo $\alpha \in (0, 1]$ (Kaufmann, 1983). Es decir, que un α-corte de un conjunto borroso es el conjunto nítido que contiene todos los elementos del conjunto referencial, cuyos grados de pertenencia al conjunto borroso son mayores o iguales que el valor especificado de α (Lazzari, 2010). Si $\alpha = 0$, el α-corte correspondiente es la clausura de la unión de los $A_\alpha$, con $0 < \alpha \leq 1$ (Buckley y Qu, 1991). La clausura de un conjunto $A$ es el menor subconjunto cerrado que contiene a $A$, es decir que es la intersección de todos los subconjuntos cerrados que contienen a $A$, y se denota $A^-$. El conjunto $A^-$ es un conjunto cerrado (Ying-Ming y Mao-Kang, 1997).

Un conjunto borroso $\widetilde{A} \subset E$, es normal si y sólo si, $\forall x \in E,\ \max \mu_{\widetilde{A}}(x) = 1$, y es convexo si y sólo si, $\forall x \in [x_1, x_2] \subset \Re$ se verifica que $\mu_{\widetilde{A}}(x) \geq \min\{\mu_{\widetilde{A}}(x_1), \mu_{\widetilde{A}}(x_2)\}$ (Tanaka, 1997).

Un número borroso (NB) $\widetilde{A}$ (Kaufmann y Gupta, 1985; Kaufmann y Gil Aluja, 1990) es un subconjunto borroso de los números reales, convexo y normal. Se puede definir número borroso en cualquier conjunto referencial totalmente ordenado.

Un número borroso es continuo si y solo si su función de pertenencia es una función continua.

Un número borroso es positivo si su función de pertenencia es igual a cero para todo número real menor o igual que cero: $\widetilde{A}$ es positivo $\Leftrightarrow \mu_{\widetilde{A}}(x) = 0 \quad \forall\, x \leq 0$ .

Los números reales y los intervalos de números reales pueden considerarse casos particulares de números borrosos (Lazzari, 2010).

Un número borroso se puede representar por sus α-cortes de manera única. Por ser un subconjunto borroso convexo, sus α-cortes son intervalos cerrados de números reales. Las dos formas de expresar un número borroso, ya sea por su función de pertenencia, $\mu_{\widetilde{A}}(x)$,

**"Visión de Futuro" Año 12, Volumen N°19, N° 2, Julio - Diciembre 2015 – Pág. 75 - 91**
URL de la Revista: http://revistacientifica.fce.unam.edu.ar/
URL del Documento: http://revistacientifica.fce.unam.edu.ar/index.php?option=com_content&view=article&id=395&Itemid=86
ISSN 1668 – 8708 – Versión en Línea
ISSN 1669 – 7634 – Versión Impresa
**E-mail:** revistacientifica@fce.unam.edu.ar

$\forall x \in \Re$, o por los α-cortes, $A_\alpha = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$ $\alpha \in [0, 1]$, son equivalentes (Kaufmann y Gupta, 1985).

### 1.1. Principio de Extensión

Este principio fue introducido por Zadeh (1975) y es una de las ideas básicas de la teoría de conjuntos borrosos, porque permite una extensión borrosa de los conceptos matemáticos clásicos, como por ejemplo las operaciones aritméticas.

El principio establece cómo un subconjunto borroso de un referencial puede inducir un subconjunto borroso de otro referencial (o del mismo) a partir de una función dada entre ambos referenciales.

Sea f una función de X en Y y $\widetilde{A}$ un subconjunto borroso de X es posible obtener un nuevo subconjunto borroso $\widetilde{B} = f(\widetilde{A})$ de Y tal que $\widetilde{B} = f(\widetilde{A}) = \{(y, \mu_{\widetilde{B}}(y)) / y = f(x), x \in X\}$, donde

$$\mu_{\widetilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in f^{-1}(y)} \mu_{\widetilde{A}}(x) & \text{si} \quad f^{-1}(y) \neq \varnothing \\ 0 & \text{si} \quad f^{-1}(y) = \varnothing \end{cases}$$

Si $f$ es una función inyectiva, entonces $\mu_{\widetilde{B}}(y) = \mu_{\widetilde{A}}(f^{-1}(y))$ cuando $f^{-1}(y) \neq \varnothing$.

La importancia de este principio radica en la posibilidad de tratar de forma borrosa cualquier dominio de razonamiento matemático basado en la teoría de conjuntos clásica. Es decir, que se puede reemplazar una variable que toma un valor determinado por el concepto borroso de grado de pertenencia para cada valor posible (Ramik, 1986).

### 1.2. Operaciones aritméticas con números borrosos

Las operaciones con números borrosos se pueden realizar mediante el empleo de: a) el Principio de Extensión, y b) los α-cortes y la generalización de operaciones con intervalos aritméticos (Buckley et al., 2010; Kaufmann y Gila Aluja, 1990).

Dados dos números borrosos reales $\widetilde{A}$ y $\widetilde{B}$ por sus respectivas funciones de pertenencia $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ y $\mu_{\widetilde{B}}(x)$, al emplear el Principio de Extensión las funciones de pertenencia para las operaciones aritméticas básicas son:

$\forall x \in \Re$ :

$$\mu_{\widetilde{A}(+)\widetilde{B}}(x) = \sup_{x = y+z} \min \left[\mu_{\widetilde{A}}(y), \mu_{\widetilde{B}}(z)\right]$$

$$\mu_{\widetilde{A}(-)\widetilde{B}}(x) = \sup_{x = y-z} \min \left[\mu_{\widetilde{A}}(y), \mu_{\widetilde{B}}(z)\right]$$


URL de la Revista: http://revistacientifica.fce.unam.edu.ar/
URL del Documento: http://revistacientifica.fce.unam.edu.ar/index.php?option=com_content&view=article&id=395&Itemid=86
ISSN 1668 – 8708 – Versión en Línea
ISSN 1669 – 7634 – Versión Impresa
E-mail: revistacientifica@fce.unam.edu.ar

$\forall x \in \Re^+ :$
$$\mu_{\tilde{A}(.)\tilde{B}}(x) = \sup_{x=y.z} \min \left[\mu_{\tilde{A}}(y), \mu_{\tilde{B}}(z)\right]$$
$$\mu_{\tilde{A}(:)\tilde{B}}(x) = \sup_{x=y/z} \min \left[\mu_{\tilde{A}}(y), \mu_{\tilde{B}}(z)\right]$$

Dado que los α-cortes de un número borroso real continuo son intervalos cerrados de $\Re$, las operaciones entre números borrosos se pueden definir como una generalización de las operaciones entre intervalos aritméticos (Kaufmann y Gupta, 1985).

Sean $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ números borrosos continuos de $\Re$, expresados por sus α-cortes $A_\alpha = [a_1(\alpha) \ , \ a_2(\alpha)]$ y $B_\alpha = [b_1(\alpha) \ , \ b_2(\alpha)]$ para $\alpha \in [0,1]$ (Lazzari, 2010).

- Si $\tilde{C} = \tilde{A}(+)\tilde{B}$ entonces $\tilde{C}_\alpha = A_\alpha(+)B_\alpha$

$$A_\alpha(+)B_\alpha = [a_1(\alpha) \ , \ a_2(\alpha)](+)[b_1(\alpha) \ , \ b_2(\alpha)]$$
$$A_\alpha(+)B_\alpha = [a_1(\alpha)+b_1(\alpha), a_2(\alpha)+b_2(\alpha)]$$

- Si $\tilde{C} = \tilde{A}(-)\tilde{B}$ entonces $\tilde{C}_\alpha = A_\alpha(-)B_\alpha$

$$A_\alpha(-)B_\alpha = [a_1(\alpha) \ , \ a_2(\alpha)](-)[b_1(\alpha) \ , \ b_2(\alpha)]$$
$$A_\alpha(-)B_\alpha = [a_1(\alpha) - b_2(\alpha), \ a_2(\alpha)-b_1(\alpha)]$$

- Si $\tilde{C} = \tilde{A}(.)\tilde{B}$ entonces $\tilde{C}_\alpha = A_\alpha(.)B_\alpha$

$$A_\alpha(.)B_\alpha = [a_1(\alpha); a_2(\alpha)](.)[b_1(\alpha); b_2(\alpha)]$$
$$A_\alpha(.)B_\alpha = [\min(a_1(\alpha).b_1(\alpha), \ a_1(\alpha).b_2(\alpha), a_2(\alpha).\mathrm{b}_1(\alpha), a_2(\alpha).\mathrm{b}_2(\alpha)); \\ \max(a_1(\alpha).b_1(\alpha), \ a_1(\alpha).b_2(\alpha), a_2(\alpha).\mathrm{b}_1(\alpha), a_2(\alpha).\mathrm{b}_2(\alpha))]$$

Si $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ son números borrosos continuos de $\Re^+$:

$$A_\alpha(.)B_\alpha = [a_1(\alpha) \ . \ b_1(\alpha) \ ; \ a_2(\alpha) \ . \ b_2(\alpha)]$$

- Si $\tilde{C} = \tilde{A}(:)\tilde{B}$ entonces $\tilde{C}_\alpha = A_\alpha(:)B_\alpha$

Si $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ son números borrosos continuos de $\Re^+$:

$$A_\alpha(:)B_\alpha = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)](:)[b_1(\alpha), b_2(\alpha)]$$
$$A_\alpha(:)B_\alpha = \left[\frac{a_1(\alpha)}{b_2(\alpha)}, \frac{a_2(\alpha)}{b_1(\alpha)}\right], \ b_1(\alpha) > 0, \ \forall \alpha \in [0,1]$$

Se puede demostrar que ambos métodos para operar con números borrosos son equivalentes (Klir y Yuan, 1995).

### 1.3. Números borrosos triangulares

Se denomina número borroso triangular (NBT) al número borroso real continuo, tal que la forma de su función de pertenencia determina con el eje horizontal un triángulo. Su función de pertenencia es lineal, a izquierda y a derecha, y alcanza el valor uno para un único número real (Kaufmann y Gil Aluja, 1990; Dubois y Prade, 1980).

Queda determinado por tres números reales $a_1 \leq a_2 \leq a_3$, su expresión mediante α-cortes es:

$$A_\alpha = [(a_2 - a_1)\,\alpha + a_1\,,\ (a_2 - a_3)\,\alpha + a_3\,] \qquad (1)$$

Es usual representarlo $\widetilde{A} = (a_1, a_2, a_3)$ (Figura 1). Por su gran simplicidad, se usan en muchas situaciones prácticas y, en particular, cuando sobre una determinada magnitud se conocen únicamente tres valores: el mínimo, el máximo y el de mayor nivel de presunción (Kahraman, 2006, 2008).

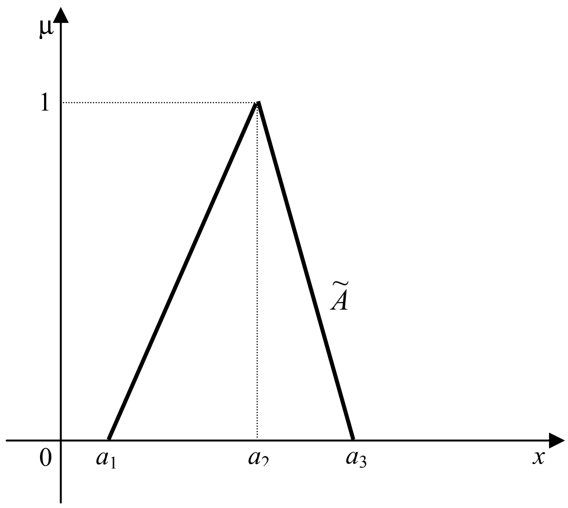


**Figura Nº1: Número borroso triangular**
**Fuente:** Elaboración Propia

## 1.4. Números borrosos trapeciales

Un número borroso trapecial (NBTr) queda determinado por cuatro números reales $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$. Es usual representarlo por $\widetilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ (Figura 2); los α-cortes son (Kaufmann y Gil Aluja, 1990; Bojadziev y Bojadziev, 1997; Dubois y Prade, 1980):

$$A_\alpha = [(a_2 - a_1)\alpha + a_1, (a_3 - a_4)\alpha + a_4] \qquad (2)$$

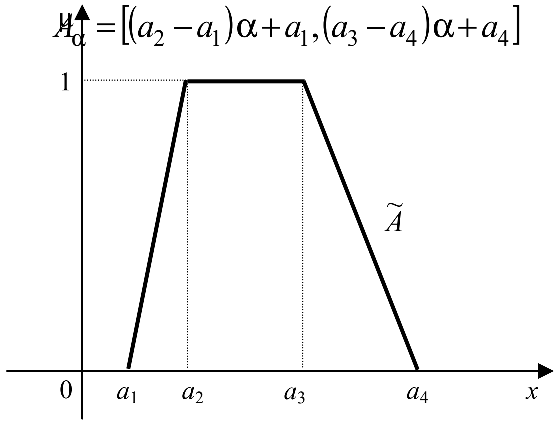


**Figura Nº2: Número borroso trapecial**
**Fuente:** Elaboración Propia

**"Visión de Futuro" Año 12, Volumen N°19, N° 2, Julio - Diciembre 2015 – Pág. 75 - 91**
URL de la Revista: http://revistacientifica.fce.unam.edu.ar/
URL del Documento: http://revistacientifica.fce.unam.edu.ar/index.php?option=com_content&view=article&id=395&Itemid=86
ISSN 1668 – 8708 – Versión en Línea
ISSN 1669 – 7634 – Versión Impresa
**E-mail:** revistacientifica@fce.unam.edu.ar

## 2. Función fuzzy o función de número borroso

En este trabajo se considera función fuzzy a toda correspondencia entre números borrosos (Buckley et al., 2010; Grabisch, 2009), también se la denomina función de número borroso (Kaufmann y Gupta, 1985). La expresión $F(\tilde{X}) = \tilde{Y}$ denota una función fuzzy de la variable independiente $\tilde{X}$. Usualmente, $\tilde{X}$ es un número borroso triangular o trapecial e $\tilde{Y}$, un número borroso cualquiera.

Las funciones fuzzy se pueden obtener como extensiones de las funciones reales de variable real mediante el empleo de: a) el Principio de Extensión y b) los α-cortes del número borroso $\tilde{X}$.

a) Dada $f:[a,b] \to \Re \,/\, f(x) = y$ se puede extender a $F(\tilde{X}) = \tilde{Y}$ del siguiente modo:

$$\mu_{\tilde{Y}}(y) = \sup_{y} \{\mu_{\tilde{X}}(x) / f(x) = y,\ a \le x \le b\} \tag{3}$$

La ecuación (3) define la función de pertenencia de $\tilde{Y}$ para cualquier número borroso $\tilde{X}$ en $[a,b]$.

b) Dada $f:[a,b] \to \Re \,/\, f(x) = y$, se expresa $\tilde{X} \subset [a,b]$ por sus α-cortes y se obtiene la extensión fuzzy $F(X_\alpha) = Y_\alpha, \forall\, \alpha \in [0,1]$.

En este trabajo las funciones fuzzy se obtendrán como extensión de funciones reales de variable real mediante los α-cortes del número borroso $\tilde{X}$.

### 2.1. Dominio de regularidad

Sea $\Re(\tilde{X})$ el conjunto de todos los números borrosos de $\Re$. Dado el número borroso $\tilde{X} \in \Re(\tilde{X})$ expresado por sus α-cortes $X_\alpha = [x_1(\alpha), x_2(\alpha)]$ y una función $f: D \to \Re$ monótona creciente en dicho intervalo, su extensión fuzzy $F(\tilde{X}) = \tilde{Y}$ es regular en el dominio $D \subseteq \Re$ si y sólo si (Figura 3):

$\forall\, \alpha \in [0,1]$, $[x_1(\alpha)\,;\, x_2(\alpha)] \subseteq D$:

$$F(X_\alpha) = F[x_1(\alpha),\, x_2(\alpha)]$$
$$F(X_\alpha) = [f(x_1(\alpha)), f(x_2(\alpha))] \tag{4}$$

El conjunto en el cual una función fuzzy es regular se denomina dominio de regularidad (Lazzari et al., 1998).

**"Visión de Futuro" Año 12, Volumen N°19, N° 2, Julio - Diciembre 2015 – Pág. 75 - 91**
URL de la Revista: http://revistacientifica.fce.unam.edu.ar/
URL del Documento: http://revistacientifica.fce.unam.edu.ar/index.php?option=com_content&view=article&id=395&Itemid=86
ISSN 1668 – 8708 – Versión en Línea
ISSN 1669 – 7634 – Versión Impresa
**E-mail:** revistacientifica@fce.unam.edu.ar

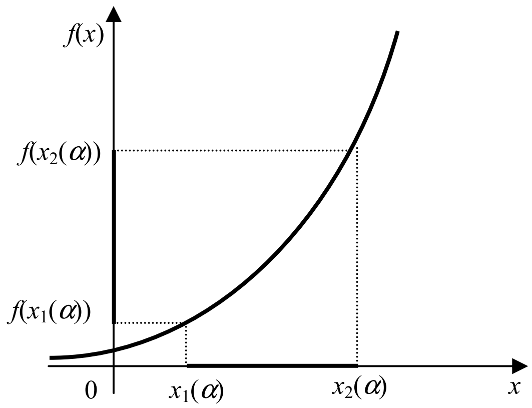


**Figura Nº 3: Dominio de regularidad**
**Fuente:** Elaboración propia, en base a Kaufmann y Gupta (1985)

Dado el número borroso $\tilde{X} \in \Re(\tilde{X})$ cuyos α-cortes son $X_\alpha = [x_1(\alpha), x_2(\alpha)]$ y una función $f : D^* \to \Re$ monótona decreciente en dicho intervalo, su extensión fuzzy $F(\tilde{X}) = \tilde{Y}$ es no regular en el dominio $D^* \subseteq \Re$ si y solo si (Figura 4):

$\forall \alpha \in [0,1]$, $[x_1(\alpha); x_2(\alpha)] \subseteq D^*$

$$F(X_\alpha) = F[x_1(\alpha), x_2(\alpha)]$$

$$F(X_\alpha) = [f(x_2(\alpha)), f(x_1(\alpha))] \tag{5}$$

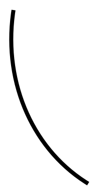

**Figura Nº 4: Dominio de no regularidad**
**Fuente:** Elaboración propia, en base a Kaufmann y Gupta (1985)

El conjunto en el cual una función fuzzy es no regular recibe el nombre de dominio de no regularidad (Lazzari et al., 1998).

En los casos en que el dominio sea irregular (ni regular ni no regular), para obtener la extensión fuzzy de $f(x) = y$ se deberá particionar el mismo. En la Figura 5 se observa que $[x_1(\alpha); x_2(\alpha)]$ es un dominio irregular y se lo puede dividir en $[x_3(\alpha); x_2(\alpha)]$, que es un dominio de regularidad y $[x_1(\alpha); x_3(\alpha)]$ de no regularidad.

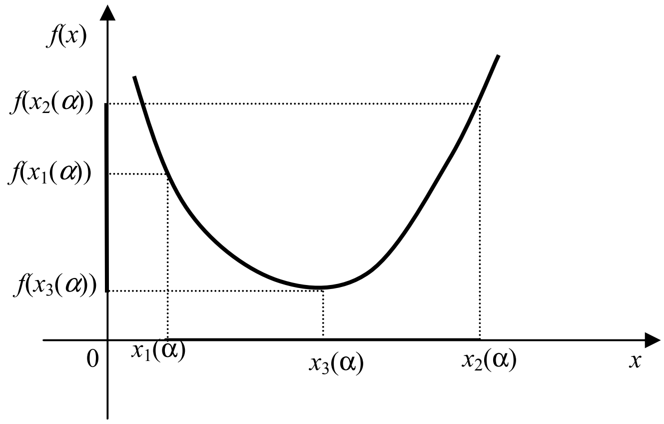


**Figura Nº5: Dominio de irregularidad**
**Fuente:** Elaboración Propia, en base a Kaufmann y Gupta (1985)

### 2.2. Derivada de una función fuzzy

Sea $y = f(x)$ una función no negativa, monótona creciente, continua y cóncava positiva en $[a;b] \subset \Re^+$, con derivada no negativa $y' = f'(x)$ en ese intervalo. Sus extensiones fuzzy, $\tilde{Y} = F(\tilde{X})$ y $F'(\tilde{X})$, serán funciones regulares en el intervalo $[a;b] \subset \Re^+$ (Kaufmann y Gupta, 1985). Para aquellas funciones que no cumplan estas condiciones, se deberá analizar cada caso en particular.

Se consideran los α-cortes de $F(\tilde{X})$ y de $F'(\tilde{X})$ para $X_\alpha = [x_1(\alpha), x_2(\alpha)]$, y se aplica (4):

$\forall \alpha \in [0,1]$: $F(X_\alpha) = [f(x_1(\alpha)), f(x_2(\alpha))]$ y $F'(X_\alpha) = [f'(x_1(\alpha)), f'(x_2(\alpha))]$ donde $[x_1(\alpha), x_2(\alpha)] \subset [a,b] \subset \Re^+$.

Como $\tilde{X}$ es un NB, $F(\tilde{X})$ y $F'(\tilde{X})$ son también números borrosos, es decir que sus funciones de pertenencia son convexas y normales (Lazzari et al., 1995, 1998).

Ejemplo: dada la función $f: \Re \to \Re \,/\, f(x) = x^2 + x$, no negativa, continua y monótona creciente en $\Re^+$, su derivada es $f: \Re \to \Re \,/\, f'(x) = 2x + 1$.

Sus extensiones fuzzy para un número borroso $\tilde{X} \subset \Re^+$

$$F(\tilde{X}) = \tilde{X}^2 (+) \tilde{X} \quad \text{y} \quad F'(\tilde{X}) = 2\tilde{X} \ (+)\, 1$$

son regulares en el dominio $D = \Re^+$, si $X_\alpha = [x_1(\alpha); x_2(\alpha)] \subset \Re^+$

$$F(X_\alpha) = [x_1^2(\alpha) + x_1(\alpha), x_2^2(\alpha) + x_2(\alpha)] \qquad (6)$$

$$F'(X_\alpha) = [2x_1(\alpha) + 1, 2x_2(\alpha) + 1] \qquad (7)$$

Sea el NBT $\tilde{X} = (1,3,4)$, se aplica (1) para obtener sus α-cortes: $X_\alpha = [2\alpha + 1, -\alpha + 4]$.


URL de la Revista: http://revistacientifica.fce.unam.edu.ar/
URL del Documento: http://revistacientifica.fce.unam.edu.ar/index.php?option=com_content&view=article&id=395&Itemid=86
ISSN 1668 – 8708 – Versión en Línea
ISSN 1669 – 7634 – Versión Impresa
E-mail: revistacientifica@fce.unam.edu.ar

Por (6) $$F(X_\alpha)=\left[4\alpha^2+6\alpha+2\ ,\ \alpha^2-9\alpha+20\right] \quad (8)$$

Por (7) $$F'(X_\alpha)=\left[4\alpha+3\ ,-2\alpha+9\right] \quad (9)$$

$$F'\left(\tilde{X}\right)=\left(3\ ,7\ ,9\right)$$

Se observa en (8) que $F\left(\tilde{X}\right)$ no es un NBT, mientras que $F'\left(\tilde{X}\right)$ sí lo es como se advierte en (9) (Figura 6).

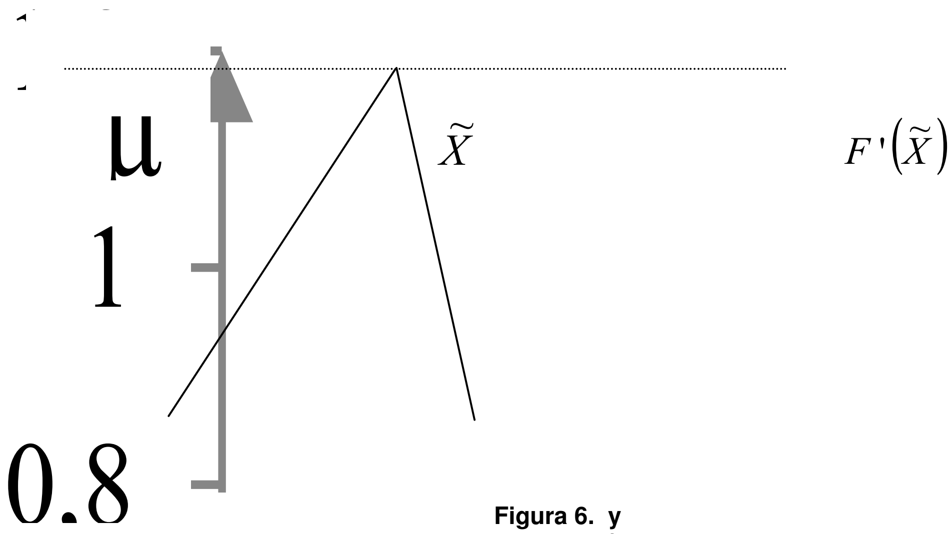


**Figura 6.** **y**
**Fuente:** Elaboración propia

**3. Caso de estudio**

Un modelo matemático puede describir con precisión los datos de un problema o proporcionar una aproximación aceptable del mismo.

La teoría de los conjuntos borrosos proporciona un valioso marco para la representación de la incertidumbre presente en la toma de decisiones (Yager, 1996). Los sistemas borrosos tienen la capacidad de modelar formas de razonamiento no preciso, que juegan un papel esencial en la notable habilidad humana para tomar decisiones racionales en entornos de incerteza e imprecisión.

En Economía, es frecuente observar que las relaciones entre magnitudes y, por lo tanto, las funciones que las expresan son de forma indeterminada o algunos de sus parámetros pueden tomar valores imprecisos o vagos. En un ambiente incierto, el decisor puede querer alcanzar ciertos niveles de aspiración que no es posible definir nitidamente, como así las variables consideradas pueden admitir pequeños desvíos. En consecuencia, diferentes elementos de las funciones que las relacionan pueden ser borrosos y la borrosidad puede expresarse en formas diferentes.

La dirección de una empresa debe mantener un registro y un control de los costos de operación, de los ingresos resultantes de la venta de sus productos o servicios y también de los beneficios obtenidos. Tres funciones ofrecen una medida de estas cantidades: la función costo total, la función ingreso total y la función beneficio (Tan, 2002).

Sea $x$ el número de unidades fabricadas o vendidas de un producto.

$C(x)$ costo total de la fabricación de x unidades del producto.

$I(x)$ ingreso total obtenido por la venta de x unidades del producto.

$B(x)$ beneficio total obtenido por la comercialización de x productos.

No siempre en un proceso productivo se puede establecer con exactitud la cantidad de unidades a producir y las que se venderán en un período de tiempo determinado. Los expertos del negocio podrán estimar un valor por debajo del cual no se ubicará la cantidad de referencia, otro por encima del cual no se encontrará la misma y una cifra que consideren como más posible. Esta aproximación puede representarse mediante un NBT.

Bajo estas circunstancias, las funciones mencionadas se pueden extender al campo fuzzy.

$C(\tilde{X})$ para $\tilde{X} = (x_1, x_2, x_3)$ indica el menor costo total al producir $x_1$ unidades de producto; el mayor costo, que corresponderá a la fabricación de $x_3$ unidades; y el costo con mayor nivel de presunción, si se producen $x_2$ artículos.

$I(\tilde{X})$ indica el menor ingreso total, que corresponde a la venta de $x_1$ unidades de producto; el mayor ingreso total, correspondiente a vender $x_3$ unidades; y el ingreso más posible, si se venden $x_2$ unidades. Por último, $B(\tilde{X})$ muestra el beneficio de comercializar como mínimo $x_1$ y como máximo $x_3$ unidades.

La función de costo total de un fabricante está dada por

$$C(x) = 0.3\,x^2 + 2\,x + 850 \tag{10}$$

donde $C$ proporciona el costo total de producir $x$ unidades de un producto.

Dada la incertidumbre del mercado, el empresario estima que en el próximo período necesitará producir no menos de 240 unidades, no más de 330 y lo más posible 300 unidades del producto. Bajo este supuesto, se puede expresar la cantidad a producir por el NBT $\tilde{X} = (240\ ,\ 300\ ,\ 330\ )$, cuyos α-cortes son:

$$X_\alpha = [60\,\alpha + 240\ ,\ -30\,\alpha + 330\ ] \tag{11}$$

Como la función fuzzy $C(\tilde{X})$ es regular en $\Re^+$, se calcula $C(\tilde{X}) = 0.3\,\tilde{X}^2 + 2\,\tilde{X} + 850$ como extensión de la función de costo dada en (10), mediante el empleo de los α-cortes de $\tilde{X}$ y (4).

$$C(X_\alpha) = [1080\ \alpha^2 + 8760\ \alpha + 18610\ ,\ 270\ \alpha^2 - 6000\ \alpha + 34180\ ] \tag{12}$$

**"Visión de Futuro" Año 12, Volumen N°19, N° 2, Julio - Diciembre 2015 – Pág. 75 - 91**
URL de la Revista: http://revistacientifica.fce.unam.edu.ar/
URL del Documento: http://revistacientifica.fce.unam.edu.ar/index.php?option=com_content&view=article&id=395&Itemid=86
ISSN 1668 – 8708 – Versión en Línea
ISSN 1669 – 7634 – Versión Impresa
**E-mail:** revistacientifica@fce.unam.edu.ar

Se destaca que la expresión (12) representa un número borroso no triangular (Figura 7). En (12) si $\alpha = 0$: $C(X_0) = [18610 \;,\; 34180\;]$ y si $\alpha = 1$: $C(X_1) = [28450 \;,\; 28450\;]$.

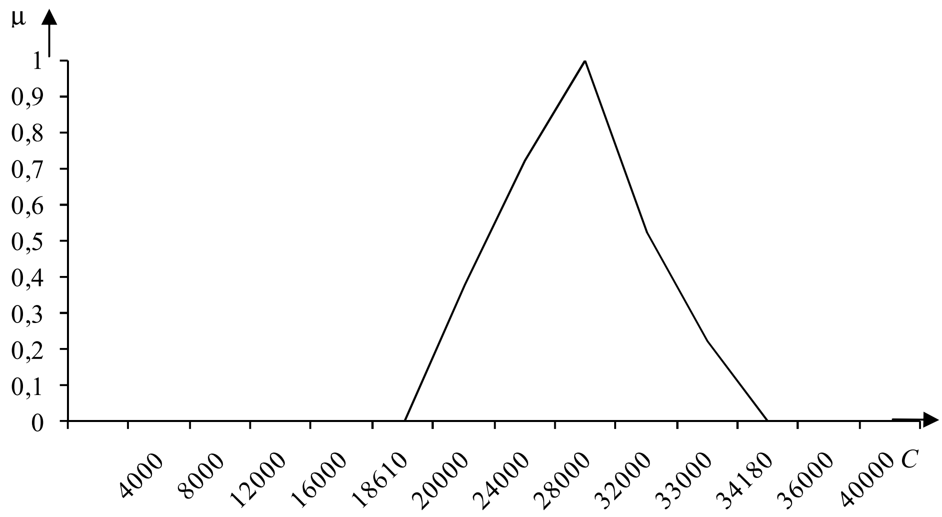


**Figura Nº 7: Costo total borroso para**
**Fuente:** Elaboración Propia

Si se observan los resultados para el caso planteado, podemos afirmar que el costo total no será menor a \$ 18610, ni mayor a \$ 34180 y su valor más posible será \$ 28450.

El fabricante asume que podrá vender las unidades producidas a un precio unitario de 1000 pesos. Su función de ingreso total está dada por (13).

$$I(x) = 1000 \quad x \tag{13}$$

Además, estima que para el próximo período las ventas no serán inferiores a 240 unidades, no superarán las 330 y lo más posible es que se vendan 300 unidades del producto. Esta información se expresa por el número borroso triangular $\tilde{X} = (240 \;,\; 300 \;,\; 330\;)$. Como la función I del número borroso $\tilde{X}$ es regular en $\Re^+$, se calcula $I(\tilde{X}) = 1000 \quad \tilde{X}$, de acuerdo con (4).

$$I(X_\alpha) = [6000\,\alpha + 240000 \;,\; -30000\,\alpha + 330000\,] \tag{14}$$

El ingreso borroso está representado por el NBT $\tilde{I} = (240000 \;,\; 300000 \;,\; 330000\;)$, que puede observarse en la Figura 8.

Este resultado indica que los ingresos esperados no serán inferiores a 240000 unidades monetarias ni superarán las 330000, y lo más posible es que sean 300000 unidades.

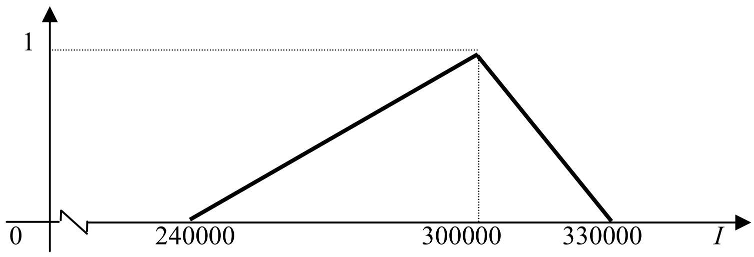


**Figura Nº8: Ingreso borroso para**
**Fuente:** Elaboración Propia

La función beneficio se puede obtener como la diferencia entre las funciones de ingreso y de costos totales.

$$B(x) = I(x) - C(x)$$

Si se resta (10) de (13) se obtiene:

$$B(x) = -0.3x^2 + 998x - 850 \qquad (15)$$

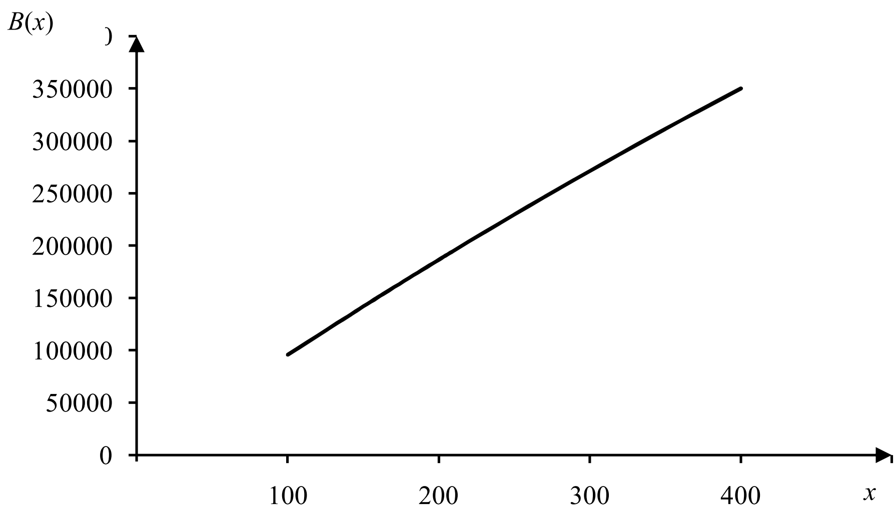


**Figura 9. Función beneficio en el intervalo [100,400]**
**Fuente:** Elaboración Propia

Como se observa en la Figura 9, la función $B(x)$ es monótona creciente en el intervalo $[240, 330] \subset \Re^+$, su extensión borrosa $B(\tilde{x})$ es regular en dicho intervalo para $\tilde{X} = (240, 300, 330)$ y se la obtiene aplicando (4).

$$B(X_\alpha) = \left[-1080\alpha^2 + 51240\alpha + 221390 \ , \ -270\alpha^2 - 24000\alpha + 295820\right] \qquad (16)$$

En (16) si $\alpha = 0$: $B(X_0) = [221390 \ , \ 295820]$ y si $\alpha = 1$: $B(X_1) = [271550 \ , \ 271550]$.

Si se vende toda la producción, los valores de $B(X_0)$ indican el beneficio para 240 y 330 unidades comercializadas del producto y $B(X_1)$ muestra el beneficio para 300.


URL de la Revista: http://revistacientifica.fce.unam.edu.ar/
URL del Documento: http://revistacientifica.fce.unam.edu.ar/index.php?option=com_content&view=article&id=395&Itemid=86
ISSN 1668 – 8708 – Versión en Línea
ISSN 1669 – 7634 – Versión Impresa
**E-mail:** revistacientifica@fce.unam.edu.ar

Esta información es muy valiosa para el empresario, que deberá promover acciones que conduzcan a alcanzar valores próximos al escenario más optimista.

Entre las aplicaciones que tiene la derivada de una función se encuentra la obtención de las denominadas tasas marginales, que permiten explorar las razones de cambio que involucran magnitudes económicas (Hoffmann et al., 2004).

El costo marginal mide la tasa con que el costo se incrementa respecto de la variación de la cantidad producida y puede calcularse, en forma aproximada, usando la derivada de la función costo para el nivel de producción considerado (Harshbarger y Reynolds, 2005).

Sea la función costo $C(x)$ dada en (10), se calcula su derivada: $C'(x) = 0.6x + 2$ y se obtiene su extensión fuzzy $C'(\tilde{X}) = 0.6\tilde{X} + 2$, que es regular en $[240, 330] \subset \Re^+$.

$$C'(X_\alpha) = [36\alpha + 146, -18\alpha + 200] \tag{17}$$

si $\alpha = 0$: $C'(X_0) = [146, 200]$ y si $\alpha = 1$: $C'(X_1) = [182, 182]$

Por lo tanto el costo marginal borroso está dado por el NBT $C'(\tilde{X}) = (146, 182, 200)$, que indica el incremento marginal de los costos al producirse no menos de 240, no más de 330 y lo más posible, 300 unidades (Figura 10).

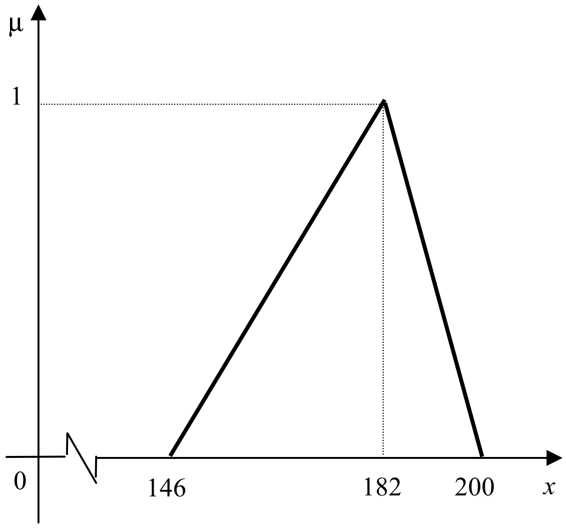


**Figura 10. Incremento marginal de los costos**
**Fuente:** Elaboración propia

Para calcular en forma aproximada el costo borroso total para un incremento mínimo de la producción es necesario sumar $C(\tilde{x})$ y $C'(\tilde{x})$ o sea (12) y (17).

$$C(x_\alpha)(+)C'(x_\alpha) = [1080\alpha^2 + 8796\alpha + 18756, 270\alpha^2 - 6018\alpha + 34380] \tag{18}$$

La expresión (18) no es un NBT. Si $\alpha = 0$: $C(X_0)(+)C'(X_0) = [18756, 34380]$ y si $\alpha = 1$: $C(X_1)(+)C'(X_1) = [28632, 28632]$.

**"Visión de Futuro" Año 12, Volumen N°19, N° 2, Julio - Diciembre 2015 – Pág. 75 - 91**
URL de la Revista: http://revistacientifica.fce.unam.edu.ar/
URL del Documento: http://revistacientifica.fce.unam.edu.ar/index.php?option=com_content&view=article&id=395&Itemid=86
ISSN 1668 – 8708 – Versión en Línea
ISSN 1669 – 7634 – Versión Impresa
**E-mail:** revistacientifica@fce.unam.edu.ar

Este resultado indica que si se efectúa un aumento mínimo de la producción, los costos totales no serán inferiores a $ 18756 ni superiores a $ 34380.

**CONCLUSIÓN**

Como se ha expuesto en este trabajo, en situaciones de incertidumbre, las funciones de número borroso son una herramienta adecuada para representar las funciones de costo total, ingreso total y beneficio, dado que permiten conocer los distintos escenarios a la hora de tomar decisiones sobre la cantidad de unidades de un bien a producir en el próximo período. La información que proporcionan permite ver con claridad cuáles son las reales perspectivas del negocio en cuanto a la ganancia que se podrá obtener con los distintos niveles de producción y venta.

De acuerdo con la información disponible, las cantidades a producir y vender también pueden representarse mediante un número borroso trapecial $\widetilde{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, donde $x_1$ indica un valor por debajo del cual no se ubica la cantidad de referencia, $x_4$ expresa el valor por encima del cual no se encuentra la misma y los valores más posibles pertenecen al intervalo $[x_2, x_3]$.

Las funciones fuzzy pueden emplearse para el estudio de otras funciones económicas, como oferta, demanda, consumo y producción. La utilización de tasas marginales es amplia en los negocios y en la economía; además del costo marginal, calculado en este trabajo, es útil obtener, entre otros, el ingreso marginal, el beneficio marginal, la productividad marginal, y las tendencias marginales para consumir y ahorrar; y se puede incorporar incertidumbre en cada caso, por medio de números borrosos.

El empleo de metodología fuzzy para la toma de decisión en problemas de gestión y economía posibilita una utilización más eficiente de los recursos y proporciona mayor información al decisor que cuando se aplican técnicas matemáticas rígidas.

Implementar modelos flexibles que empleen metodologías borrosas para plantear y resolver problemas de gestión y economía resulta útil para identificar y comprender las dificultades que se presentan en su análisis, y para generar nuevos escenarios de reflexión a la hora de elegir medios y marcar objetivos.

**REFERENCIAS**

Bojadziev, G. y Bojadziev, M. (1997). Fuzzy logic for business, finance, and management. Singapore, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd..

**"Visión de Futuro" Año 12, Volumen N°19, N° 2, Julio - Diciembre 2015 – Pág. 75 - 91**
URL de la Revista: http://revistacientifica.fce.unam.edu.ar/
URL del Documento: http://revistacientifica.fce.unam.edu.ar/index.php?option=com_content&view=article&id=395&Itemid=86
ISSN 1668 – 8708 – Versión en Línea
ISSN 1669 – 7634 – Versión Impresa
**E-mail:** revistacientifica@fce.unam.edu.ar

Buckley, J.; Eslami, E. y Feuring, T. (2010). Fuzzy Mathematics in Economics and Engineering. Heidelberg, Physica-Verlag.

Buckley, J. y Qu, Y. (1991). "Solving fuzzy equations: A new concept". Fuzzy Sets and Systems. Volumen 39, pgs. 291-301.

Bustince, H.; Herrera, F. y Montero, J. (edits.). (2008). Fuzzy Sets and their Extensions: Representation, Aggregation and Models. Berlin, Springer.

Dubois, D. y Prade, H. (1980). Fuzzy sets and Systems. Theory and Applications. New York, Academic Press.

Gil Lafuente, A.M. (2001). Nuevas estrategias para el análisis financiero en la empresa. Barcelona, Ariel.

Grabisch, M.; Marichal, J.L.; Mesiar, R. y Pap, E. (2009). Aggregation Functions. Cambridge, Cambridge University Press.

Harshbarger, R. J. y Reynolds, J. J. (2005). Matemáticas aplicadas a la Administración, Economía y Ciencias Sociales. México, McGraw-Hill Interamericana.

Hoffmann, L.; Bradley, G. y Rosen, K. (2004). Cálculo aplicado para Administración, Economía y Ciencias Sociales. México, McGraw-Hill.

Kahraman, C. (edit.) (2006). Fuzzy Applications in Industrial Engineering. Berlin, Springer-Verlag.

Kahraman, C. (edit.) (2008). Fuzzy Engineering Economics with Applications. Berlin, Springer.

Kaufmann, A. (1983). Introducción a la teoría de los subconjuntos borrosos. México, CECSA.

Kaufmann, A. y GUPTA, M. (1985). Introduction to Fuzzy Arithmetic. New York, Van Nostrand Reinhold Company.

Klir, G. y Yuan, B. (1995). Fuzzy sets and fuzzy logic. Theory and Applications. USA, Prentice-Hall PTR.

Kosko, B. (1995). Fuzzy logic for business and industry. Massachusetts, Charles River Media.

Kruse, R.; Gebhardt, J. y Klawonn, F. (1995). Foundations of Fuzzy Systems. London, John Wiley & Sons Ltd..

Lazzari, L.; Machado, E. y Pérez, R. (1995). "Decision theory in conditions of uncertainty". Fuzzy Economic Review. Volumen 0, pgs. 87-101.

Lazzari, L.; Machado, E. y Pérez, R. (1998). Teoría de la decisión fuzzy. Buenos Aires, Ediciones Macchi (Segundo Premio Nacional de Economía, año 2005).

Lazzari, L. (2010). El comportamiento del consumidor desde una perspectiva fuzzy. Una aplicación al turismo. Buenos Aires, Editorial Consejo Profesional de Ciencias Económicas (EDICON).

Ramik, J. (1986). "Extension Principle in fuzzy optimization". Fuzzy Sets and Systems. Volumen 19, pgs. 29-35.

Ragin, C.C. (2000). Fuzzy-Set Social Science. Chicago, The University of Chicago Press.

Smithson, M. y Verkuilen, J. (2006). Fuzzy Set Theory. Applications in the Social Sciences. Thousand Oaks, SAGE Publications.

Tan, S. (2002). Matemáticas para Administración y Economía. México, Thomson Learning.

Tanaka, K. (1997). An introduction to Fuzzy Logic for practical applications, New York. Springer-Verlag.

Yager, R. (1996). "On general approach to decision making under uncertainty". Proceedings of the III Congress of SIGEF, Buenos Aires, p.5.

Ying-Ming, L. y Mao-Kang, L. (1997). Fuzzy Topology. Singapur, World Scientific, p.43.

Zadeh, L. A. (1965). "Fuzzy sets". Information and Control. Volumen 8, pgs. 338-353.

Zadeh, L. (1975). "The concept of a linguistic variable and its applications to approximate reasoning". Part I, Information Sciences. Volumen 8, pgs. 199-249. Part II, Information Sciences. Volumen 8, pgs. 301-357. Part III, Information Sciences. Volumen 9, pgs. 43-80.

## RESUMEN BIOGRÁFICO

### Luisa L. Lazzari

Doctora en Economía (Universidad de Valladolid, España); Profesora Titular Regular Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires; Directora de CIMBAGE, FCE, UBA; Directora del Proyecto UBACyT 20020100100025 de la Programación Científica 2011-2014 de la UBA. Docente Investigadora Categoría I.

### Jorge A. Chiodi

Ing. en Electrónica, (UTN, Facultad Regional Avellaneda). Prof. Titular Matemática I. Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Nacional de Lomas de Zamora. Investigador del Proyecto UBACyT 20020100100025 de la Programación Científica 2011-2014, UBA. Docente Investigador Categoría IV.

### Patricia Moulia

Lic. en Enseñanza de la Matemática (Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Lomas de Zamora). Profesora Adjunta Regular Facultad de Ciencias Económicas, UBA. Subdirectora CIMBAGE, IADCOM Facultad de Ciencias Económicas, UBA. Investigadora del Proyecto UBACyT 20020100100025 de la Programación Científica 2011-2014, UBA. Docente Investigadora Categoría IV.

**"Visión de Futuro" Año 12, Volumen N°19, N° 2, Julio - Diciembre 2015 – Pág. 75 - 91**
URL de la Revista: http://revistacientifica.fce.unam.edu.ar/
URL del Documento: http://revistacientifica.fce.unam.edu.ar/index.php?option=com_content&view=article&id=395&Itemid=86
ISSN 1668 – 8708 – Versión en Línea
ISSN 1669 – 7634 – Versión Impresa
**E-mail:** revistacientifica@fce.unam.edu.ar